Lösung zweier Arten von Gleichungen.

Von Wenzel Šimerka,
Gymnasiallehrer zu Budweis.

I. Bestimmte Gleichungen des ersten Grades mit n Unbekannten gelöst mittelst der Permutationslehre.

Die n Gleichungen, die bei dieser Aufgabe vorkommen, kann man durch nachstehendes Schema darstellen:

$$\begin{array}{l}
A_1^1 x_1 + A_2^1 x_2 + A_3^1 x_3 + \ldots . A_n^1 x_n = G_1 \\
A_1^2 x_1 + A_2^2 x_2 + A_3^2 x_3 + \ldots . A_n^2 x_n = G_2 \\
A_1^3 x_1 + A_2^3 x_2 + A_3^3 x_3 + \ldots . A_n^3 x_n = G_3 \\
\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
A_1^n x_1 + A_2^n x_2 + A_3^n x_3 + \ldots . A_n^n x_n = G_n .
\end{array}$$

Hierbei sind $x_1, x_2, x_3, \ldots . x_n$ die n Unbekannten, $G_1, G_2, G_3 \ldots . G_n$ die bekannten Gleichungsglieder, und A_b^a bedeutet im Allgemeinen den b^{ten} Coëfficienten in der a^{ten} Gleichung. Kommen in einer Gleichung nicht alle Unbekannten vor, so sind die Coëfficienten der fehlenden $= 0$ zu nehmen.

Bei diesen Untersuchungen wird man es mit Producten aus je n Coëfficienten der obigen Gleichungen zu thun haben. Jedes solcher Producte enthält je einen Coëfficienten aus jeder Zeile und zugleich auch einen aus jeder Columne des obigen Schema als Factor, so dass, wenn es durch $A_a^\alpha A_b^\beta A_c^\gamma \ldots A_m^\mu$ dargestellt wird, sowohl die Zeiger $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu$ als auch $a, b, c, \ldots m$ alle natürlichen Zahlen von 1 bis n sind. Man kann demnach die Factoren dieses Productes derart versetzen, dass es die Gestalt $A_a^1 A_b^2 A_c^3 \ldots A_m^n$ erlangt, welche Grösse, wenn es die Deutlichkeit zulässt, mit $A_a A_b A_c \ldots A_m$. oder noch kürzer mit $a, b, c, \ldots m$ bezeichnet werden kann.

Unter den Permutationsformen, welche $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ oder kurz $123 \ldots n$ gibt, ist es nebstdem noch nöthig positive und negative zu unterscheiden. Als Grundsatz dient hier, dass zwei Permutationen mit ungleichen Vorzeichen zu nehmen sind, wenn sie alle Stellen ausser zwei gleich besetzt haben. So sind *bacde* und *bcade* entgegengesetzt, weil die Elemente *bde* ihre früheren Stellen behalten, *ac* sie aber ändern. Hieraus folgt, dass durch die Verschiebung dreier Elemente, d. h. durch Versetzungen wie etwa 123, 231, 312, das Vorzeichen nicht geändert wird, indem so eine Verschiebung für zwei einfache Versetzungen gilt. Ebenso sieht man, dass es im Ganzen eben so viele negative als positive Permutationen gibt, da durch die Versetzung der letzten zwei Elemente jede Form ihr Zeichen ändert.

Auch erhellet es aus dem mathematischen Schreibegebrauche, dass die Form $A_1\, A_2\, A_3 \ldots A_n$ positiv zu nehmen ist, indem man keinen Grund für das Gegentheil hat.

Nach diesen Bemerkungen kommen bei

$n = 2$: 12, — 21,

$n = 3$: 123, 231, 312, — 132, — 213, — 321,

$n = 4$: 1234, 1342, 1423, 2143, 2314, 2431,
3124, 3241, 3412, 4132, 4213, 4321,
— 1243, — 1324, — 1432, — 2134, — 2341, — 2413,
— 3142, — 3214, — 3421, — 4123, — 4231, — 4312

u. s. w. als wohlgeordnete Permutationsformen vor.

Die Summe aller so entstandenen Permutationsformen der Grössen $A_1\, A_2 \ldots A_n$ mit Berücksichtigung ihrer Vorzeichen kann man, wie Ähnliches bei den Combinationen und Variationen zu geschehen pflegt, mit

$$\mathfrak{P}\,(A_1, A_2, A_3 \ldots A_n)$$

bezeichnen, und wird anstatt eines dieser Elemente, z. B. anstatt A_r stets G gesetzt, welches dann seinen Zeiger in jeder Form von der Stelle erhält, die A_r einnimmt, so kann das Resultat füglich durch

$$\mathfrak{P}\,(A_1, A_2, \ldots \underset{(G)}{A_r} \ldots A_n)$$

dargestellt werden. So hat man z. B.

$$\underset{(G)}{\mathfrak{P}}(A_1, A_2, A_3) = A_1\, G_2\, A_3 + G_1\, A_3\, A_1 + A_3\, A_1\, G_3 - A_1\, A_3\, G_3 - G_1\, A_1\, A_3 - A_3\, G_2\, A_1$$

oder vollständig

$$\underset{(G)}{\mathfrak{P}}(A_1, A_2, A_3) = A_1^1\, G_2\, A_3^3 + G_1\, A_3^2\, A_1^3 + A_3^1\, A_1^2\, G_3 - A_1^1\, A_3^2\, G_3 - G_1\, A_1^2\, A_3^3 - A_3^1\, G_2\, A_1^3.$$

Wird nun hierauf $N = \mathfrak{P}(A_1, A_2, \ldots A_n)$

$$Z_1 = \mathfrak{P}(\underset{(G)}{A_1}, A_2, \ldots A_n)\,,\quad Z_2 = \mathfrak{P}(A_1, \underset{(G)}{A_2}, A_3 \ldots A_n)$$

und überhaupt

$$Z_r = \mathfrak{P}(A_1, A_2, \ldots \underset{(G)}{A_r} \ldots A_n)$$

gesetzt, so ergibt sich

$$x_1 = \frac{Z_1}{N},\quad x_2 = \frac{Z_2}{N},\quad \ldots\quad x_r = \frac{Z_r}{N}.$$

Beweis.

Hier ist nur nöthig zu zeigen, dass die obigen Gleichungen für die angeführten Werthe der Unbekannten bestehen, indem bei bestimmten Gleichungen des ersten Grades jede Unbekannte nur einen Werth hat. Rücksichtlich der ersten Gleichung soll daher dargethan werden, dass $A_1^1 Z_1 + A_2^1 Z_2 + A_3^1 Z_3 + \ldots A_n^1 Z_n = G_1 N$ sei.

Summirt man zu diesem Zwecke

$$A_1^1\, Z_1 + A_2^1\, Z_2 + A_3^1\, Z_3 + \ldots A_n^1\, Z_n$$

nach den Grössen $G_1, G_2, G_3 \ldots G_n$, so ergibt sich N als Coëfficient von G_1, die Coëfficienten von $G_2, G_3, \ldots G_n$ sind aber sämmtlich Null.

In ersterer Beziehung ist nämlich G_1 in

$$Z_1 = \mathfrak{P}(\underset{(G)}{A_1}, A_2, \ldots A_n)$$

blos aus der Ersetzung von A_1^1 entstanden, wobei die übrigen Elemente beliebig versetzt werden können; daher liefert das Product $A_1^1\, Z_1$ die Grösse $A_1^1\, \mathfrak{P}(A_2, A_3, \ldots A_n)$ als Coëfficienten von G_1. Ebenso kommt G_1 in

$$Z_2 = \mathfrak{P}(A_1, \underset{(G)}{A_2}, A_3, \ldots A_n)$$

aus der Ersetzung von A_2^1 zum Vorschein. so dass man im Producte $A_2^1 Z_2$ die Zahl $A_2^1 \mathfrak{P} (A_1, A_3, \ldots A_n)$ als Factor von G_1 erhält. Auf dieselbe Art liefert $A_3^1 Z_3$ den partiellen Coëfficienten

$$A_3^1 \mathfrak{P} (A_1 A_2 A_4 \ldots A_n) \text{ u. s. w.}$$

Dem zufolge ist die fragliche Grösse

$$= A_1^1 \mathfrak{P} (A_2, A_3, \ldots A_n) + A_2^1 \mathfrak{P} (A_1, A_3, \ldots A_n)$$
$$+ A_3^1 \mathfrak{P} (A_1, A_2, A_4 \ldots A_n) + \ldots\ldots$$

was offenbar $\mathfrak{P} (A_1, A_2, A_3 \ldots A_n) = N$ gibt.

Rücksichtlich der Coëfficienten von G_2, G_3, ... entspricht jeder Permutationsform von der Gestalt $A_a^1 A_b^2 \ldots A_\varphi^\psi \ldots A_m^n$, wo ψ alle Werthe ausser 1 erhalten kann, die Form

$$- A_\varphi^1 A_b^2 \ldots A_a^\psi \ldots A_m^n.$$

Aus der ersteren dieser Formen erhält man zu $A_\varphi^1 Z_\varphi$ das Glied $A_\varphi^1 A_a^1 A_b^2 \ldots G_\psi \ldots A_m^n$, wo die zweite bei $A_a^1 Z_a$ das Product

$$- A_a^1 A_\varphi^1 A_b^2 \ldots G_\psi \ldots A_m^n$$

liefert. Da sich diese Grössen heben, so ist der Coëfficient von G_ψ stets Null.

Die oben angeführten Werthe genügen daher der ersten Gleichung; sie genügen aber auch der zweiten, d. i.

$$A_1^2 x_1 + A_2^2 x_2 + A_3^2 x_3 + \ldots A_n^2 x_n = G_2,$$

indem sich hier dieselben Schlüsse wiederholen lassen, da letztere Bedingungsgleichung aus der ersteren entsteht, wenn sämmtliche Zeiger um 1 erhöht werden, und man $A_{n+1}^2 x_{n+1}$ für $A_1^2 x_1$ ansieht.

Ebenso erhellet auch die Richtigkeit der dritten und aller übrigen Gleichungen des obigen Schema.

Besondere Fälle.

Für $n = 2$ erhält man

$$N = A_1^1 A_2^2 - A_2^1 A_1^2,\quad Z_1 = G_1 A_2^2 - A_2^1 G_2,\quad Z_2 = A_1^1 G_2 - G_1 A_1^2$$

und wird

$$A_1^1 = a,\ A_2^1 = b,\ G_1 = c$$
$$A_1^2 = a',\ A_2^2 = b',\ G_2 = c'$$

gesetzt, so ist

$$x_1 = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}\,, \quad x_2 = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}\,.$$

Bei $n = 3$ kann man dem Nenner N auch die Gestalt

$$\begin{array}{c} A_1^1 A_2^2 A_3^3 + A_1^2 A_2^3 A_3^1 + A_1^3 A_2^1 A_3^2 \\ - A_3^1 A_2^2 A_1^3 - A_3^2 A_2^3 A_1^1 - A_3^3 A_2^1 A_1^2 \end{array}$$

geben, und dann lässt sich die Bildung von N, Z_1, Z_2, Z_3 als die Summe von wechselnden Querproducten in den vier Paradigmen

$$\begin{array}{cccc} N & Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ A_1^1 A_2^1 A_3^1 & G_1 A_2^1 A_3^1 & A_1^1 G_1 A_3^1 & A_1^1 A_2^1 G_1 \\ A_1^2 A_2^2 A_3^2 & G_2 A_2^2 A_3^2 & A_1^2 G_2 A_3^2 & A_1^2 A_2^2 G_2 \\ A_1^3 A_2^3 A_3^3 & G_3 A_2^3 A_3^3 & A_1^3 G_3 A_3^3 & A_1^3 A_2^3 G_3 \\ A_1^1 A_2^1 A_3^1 & G_1 A_2^1 A_3^1 & A_1^1 G_1 A_3^1 & A_1^1 A_2^1 G_1 \\ A_1^2 A_2^2 A_3^2 & G_2 A_2^2 A_3^2 & A_1^2 G_2 A_3^2 & A_1^2 A_2^2 G_2 \end{array}$$

versinnlichen.

Was $n = 4$ anbelangt, kann man sich die 24 Producte von je 4 Factoren, aus denen N besteht, unter der Figur

$$A_1^1 \left\{ \begin{array}{c} A_2^2 A_3^2 A_4^2 \\ A_2^3 A_3^3 A_4^3 \\ A_2^4 A_3^4 A_4^4 \\ A_2^2 A_3^2 A_4^2 \\ A_2^3 A_3^3 A_4^3 \end{array} \right\} - A_1^2 \left\{ \begin{array}{c} A_2^1 A_3^1 A_4^1 \\ A_2^3 A_3^3 A_4^3 \\ A_2^4 A_3^4 A_4^4 \\ A_2^1 A_3^1 A_4^1 \\ A_2^3 A_3^3 A_4^3 \end{array} \right\} + A_1^3 \left\{ \begin{array}{c} A_2^1 A_3^1 A_4^1 \\ A_2^2 A_3^2 A_4^2 \\ A_2^4 A_3^4 A_4^4 \\ A_2^1 A_3^1 A_4^1 \\ A_2^2 A_3^2 A_4^2 \end{array} \right\}$$

$$- A_1^4 \left\{ \begin{array}{c} A_2^1 A_3^1 A_4^1 \\ A_2^2 A_3^2 A_4^2 \\ A_2^3 A_3^3 A_4^3 \\ A_2^1 A_3^1 A_4^1 \\ A_2^2 A_3^2 A_4^2 \end{array} \right\}$$

leichterer Berechnung halber darstellen; wobei die eingeklammerten Grössen je sechs wechselnde Querproducte geben. Um hieraus den Zähler Z_r zu erhalten, ist statt A_r^1, A_r^2, A_r^3, A_r^4 beziehungsweise G_1, G_2, G_3, G_4 zu setzen.

A n m e r k u n g. Den ersten Gedanken zu dieser immerhin schönen Anwendung der Permutationslehre gaben mir meine Untersuchungen über die trinären Zahlformen.

II. Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades mit zwei Unbekannten gelöst mittelst der Congruenzlehre.

Der Gleichung $nx = my + r$, wobei $m\, n$ prim zu einander sind, wird Genüge geleistet bei $x = mt + \varphi$, $y = nt + \psi$, wo t eine beliebige ganze Zahl vorstellt, φ und ψ aber unter dessen unbestimmt sind. Werden diese Werthe in die gegebene Gleichung substituirt, so liefern sie $n\varphi = m\psi + r$.

Wäre hier $\varphi = mk + \varphi'$, so kann das Product mk in Folge des Werthes von x zu mt bezogen werden; daher braucht man nur einen einzigen Werth von φ, d. i. etwa jenen, der ohne Rücksicht auf das Vorzeichen $\overline{\overline{<}}\ \frac{1}{2}m$ ist, zu kennen, man findet dann

$$\psi = \frac{n\varphi - r}{m}.$$

Um nun φ zu erhalten, betrachte man die zwei Congruenzen

$$m\varphi \equiv o, \quad n\varphi \equiv r \quad (\text{Mod. } m);$$

die erste ist an sich klar, die zweite entsteht aus obiger Gleichung, und es kann darin, wenn dies noch nicht der Fall wäre, n und $r \overline{\overline{<}}\ \frac{1}{2}m$ gemacht werden; auch ist es erlaubt die Vorzeichen bei n und r zu verändern, um etwa ein negatives n positiv zu machen. Ist nun $n < \frac{1}{2}m$, so suche man die grösste in $\frac{m}{n}$ enthaltene ganze Zahl auf; ist sie d, so erhält man $m = dn + n'$, wo $n' < \frac{1}{2}n$ sein wird. Dann gibt die zweite Congruenz $dn\varphi \equiv dr$; wird dies von der ersten abgezogen $(m - dn)\varphi \equiv -dr$, oder $n'\varphi \equiv -dr$, und wenn $r' \equiv -dr$ (Mod. m) den kleinsten Rest von $-dr$ bedeutet, $n'\varphi \equiv r'$. Heisst ferner d' die grösste in $\frac{n}{n'}$ vorkommende ganze Zahl, so kann abermals $n = n'd' + n''$, wo $n'' < \frac{1}{2}n'$, gesetzt werden, und man erhält aus der zweiten und letzten Congruenz

$$(n - n'd')\,\varphi \equiv r - d'r' \quad \text{oder} \quad n''\varphi \equiv r''.$$

Verfährt man auf diese Weise fort, so muss man, weil von den Grössen $m, n, n', n'', \ldots$ jede nachfolgende kleiner ist als die halbe vorhergehende, schliesslich 1 zum Coëfficienten von φ erhalten, wo

aus der Congruenz $\varphi \equiv \rho \overline{\gtrless} \frac{1}{2} m$ (Mod. m) ρ als der gesuchte Werth von φ hervorgeht, wodurch sich auch ψ ergibt.

Man hätte z. B. $9451 x = 5263 y + 29$ zu lösen. Hier ist $m = 5263$ und die erste Congruenz

$5263 \varphi \equiv 0$; da ferner $9451 - 2m = -1075$ ist, daher $-1075 \varphi \equiv 29$, so erhält man die 2. Cong.
$1075 \varphi \equiv -29$. Hier ist $d = 5$, also $-112 \varphi \equiv 145$ oder
$112 \varphi \equiv -145$; dann $d' = 10$, und $-45 \varphi \equiv 1421$, d. i.
$45 \varphi \equiv -1421$; ferner $d'' = 2$ gibt $22 \varphi \equiv 2697 \equiv -2566$
$22 \varphi \equiv -2566$; wo dann $d''' = 2$, $\varphi \equiv 3711$ oder
$\varphi = -1552$ also $\psi = -2787$ hervorgeht, so dass

$$x = 5263 t - 1552 \quad \text{und} \quad y = 9451 t - 2787$$

die vollständigen Werthe der Unbekannten sind.

Wer sich mit diophantischen Gleichungen befasst, wird die Arbeitersparniss, welche diese Methode im Vergleiche gegen die Euler'sche und gegen die Lösung mittelst der Kettenbrüche gewährt, bald einsehen. Überdies kann man hier zwei oft vorkommende Umstände mit Vortheil benützen, und zwar:

a) Haben in Congruenzen von der Gestalt $n' \varphi \equiv r'$ (Mod. m) die Grösen n', r' oft einen gemeinschaftlichen Theiler, wodurch sie, vorausgesetzt dass m, n prim zu einander sind, gekürzt werden können. Noch öfters geschieht es, dass n' zu Factoren Potenzen von 2, 3 oder 5 hat; würde r' diese Factoren nicht besitzen, so kann es, um sie zu erhalten, um m oder $2m$ vermehrt oder vermindert werden.

So gibt z. B. die Gleichung $2160 x = 937 y - 53$ bei $m = 937$, $2160 \varphi \equiv -53 \equiv -990$; dies durch 90 gekürzt, $24 \varphi \equiv -11 \equiv -948$, was abermals durch 12 gekürzt $2 \varphi \equiv -79 \equiv 858$ oder $\varphi = 429$ und $\psi = 989$ liefert.

b) Häufig, besonders bei dem eben angeführten Verfahren, geschieht es, dass das n' der schliesslich resultirenden Congruenz $n' \varphi \equiv r'$ (Mod. m) gegen den Coëfficienten n der zunächst vorhergehenden Congruenz $n \varphi \equiv r$ bedeutend klein ausfällt, dadurch würde d' gross und die Zwischenrechnung beschwerlich werden. Man kann jedoch die Congruenz $n' \varphi \equiv r'$ (Mod. m) in die Gleichung $n' \varphi = m \varphi' + r'$, und diese wieder in die Congruenz $m \varphi' + r' \equiv 0$

(Mod. n') oder $m\varphi' \equiv -r'$ verwandeln, woraus sich φ' somit auch $\varphi = \frac{m\varphi' + r'}{n'}$ leicht berechnen lässt. So kommt man z. B. bei der Verrechnung von $6336x = 9419y + 1$ nach $a)$ zu $11\varphi \equiv -3712$ (Mod. 9419), was in $3\varphi' \equiv 5 \equiv -6$ (Mod. 11) übergeht, so dass man $\varphi' = -2$. $\varphi = -2050$ und $\psi = -1379$ erhält.

Vorträge.

Berichtigung über die Ala parva Ingrassiae.

Von dem w. M. Regierungsrath **Hyrtl.**

Fast in allen Beschreibungen des Keilbeins wird eine *Ala parva Ingrassiae* angeführt. Einige Autoren gebrauchen den Ausdruck im Plural, und bezeichnen mit diesem Namen kleine Knochenplättchen, welche öfters auf der *Spina angularis* des Keilbeins aufsitzen sollen. So z. B. Arnold [1]. Blumenbach [2] sagt ausdrücklich, dass die *Alae parvae Ingrassiae* an der hinteren Seite der *Spina sphenoidalis* s. *angularis* anliegen, und citirt für die Berechtigung dieser *Alae*, pag. 75 des Commentars von *Ingrassias*. Andere gebrauchen das Wort im Singular, und verstehen unter ihm einen einfachen Fortsatz des Keilbeinstachels [3].

Henle [4] nennt *Ala parva Ingrassiae* die gesammte *Spina angularis* des Keilbeins, wenn sie ihre gewöhnliche, durch den Namen *Spina* ausgedrückte Gestalt, in eine breite, scharfkantige Gräte umwandelt, welche einem schmalen, abwärts gerichteten Flügel ähnlich wird. Sömmerring kennt die Ingrassischen Flügel gar nicht. Ebenso Meckel.

J. Phil. Ingrassias (nicht Ingrassia, wie er bei Burggraeve [5] heisst), zu Rachalbuto in Sicilien im Jahre 1510 geboren, wurde

---

[1] Handbuch der Anatomie des Menschen. 1. Bd. p. 390.

[2] Geschichte und Beschreibung der Knochen, p. 160.

[3] So J. Weber, Handbuch der Anatomie des menschlichen Körpers. 1. Bd. p. 105.

[4] Handbuch der systematischen Anatomie. 1. Bd. p. 107.

[5] Précis de l'histoire de l'anatomie. Gand, 1840, pag. 233.